Chapitre 7

Nombres réels

Plan du chapitre

1 Propriété de la borne supérieure

Rappel : $(\mathbb{R}, \leq)$ est un ensemble ordonné. Cet ordre est total. Muni de cette relation d'ordre, on peut définir les notions suivantes :

Définition 7.1 (Rappels : majorants, minorants)

Soient m, M deux réels et $A \subset \mathbb{R}$. On dit que :

- A est majorée par M si tout élément de A est inférieur ou égal à M, càd $\forall x \in A \quad x \leq M$.
  On dit aussi que M est un majorant de A.
- A est minorée par m si tout élément de A est supérieur ou égal à m, càd $\forall x \in A \quad x \geq m$.
  On dit aussi que m est un minorant de A.
- A est majorée si A admet un majorant.
- A est minorée si A admet un minorant.
- A est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Définition 7.2 (Rappels : maximum, minimum)

Soit $A \subset \mathbb{R}$. On dit que :

- $M \in \mathbb{R}$ est ***le*** plus grand élément (ou le maximum) de A si M est un majorant de A et $M \in A$.
- $m \in \mathbb{R}$ est ***le*** plus petit élément (ou le minimum) de A si m est un minorant de A et $m \in A$.

Le maximum et le minimum, lorsqu'ils existent, sont uniques. Ils sont notés :

$$\max A \qquad \min A$$

Partie $A \subset \mathbb{R}$	Minorée	$\inf A$	$\min A$	Majorée	$\sup A$	$\max A$
$[0,1]$						
$\mathbb{N}$						
$\mathbb{Q}$						
$]0,1[$						
$\left\{ -\frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N} \right\}$						

Attention, un majorant / maximum / "sup" / minorant / etc. doit être un élément de $\mathbb{R}$: il ne peut pas valoir $+\infty$ ou $-\infty$ (sauf si on vous impose une convention...)

Définition 7.3 (NOUVEAU : borne inférieure et supérieure)

Soit $A \subset \mathbb{R}$.

- On dit que $M \in \mathbb{R}$ est **la** borne supérieure de A si M est le plus petit des majorants de A.
- On dit que $m \in \mathbb{R}$ est **la** borne inférieure de A si m est le plus grand des minorants de A.

La borne supérieure et la borne inférieure, lorsqu'ils existent, sont uniques. Elles sont notées :

$$\sup A \qquad \inf A$$

Proposition 7.4 (Axiome : propriété de la borne supérieure)

- Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
- Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

On dit que $\mathbb{R}$ possède la propriété de la borne supérieure.

Parenthèse (Hors programme). C'est un axiome et une propriété fondamentale de $\mathbb{R}$, inhérente à sa construction. Très grossièrement, cela veut dire que si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ admet une limite finie, cette limite "ne sort pas de $\mathbb{R}$" et restera dans $\mathbb{R}$.
Par contre, $\mathbb{Q}$ ne possède pas la propriété de la borne supérieure : on peut trouver une suite à valeurs dans $\mathbb{Q}$ dont la limite (finie) "sort de $\mathbb{Q}$". En utilisant le développement décimal de $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} = 1,4142135623\ldots$$

on peut définir une suite u_n :

$$\begin{aligned} u_0 &= 1 & u_4 &= 1,4142 \\ u_1 &= 1,4 & u_5 &= 1,41421 \\ u_2 &= 1,41 & u_6 &= 1,414213 \\ u_3 &= 1,414 & &\ldots\ldots \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien $u_n \in \mathbb{Q}$, et même $u_n \in \mathbb{D}$: par exemple $u_6 = \frac{1414213}{10^6} \in \mathbb{D}$. Mais la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\sqrt{2}$ qui n'appartient pas à $\mathbb{Q}$. C'est une façon de prouver que $\mathbb{Q}$ ne possède pas la propriété de la borne supérieure.

Proposition 7.5

Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide. Si A est majorée,

$$M = \sup A \iff \begin{cases} \forall x \in A & x \leq M \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A & x > M - \varepsilon \end{cases}$$

De même, si A est minorée,

$$m = \inf A \iff \begin{cases} \forall x \in A & x \geq m \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A & x < m + \varepsilon \end{cases}$$

On notera que, contrairement à $\max A$, le réel $\sup A$ n'appartient pas forcément à A.

Exemple 1. On pose $A = \left\{ -\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$. Montrer que $\sup A = 0$.

Proposition 7.6

Soit $A \subset \mathbb{R}$. Si A admet un maximum, alors A admet une borne supérieure et $\max A = \sup A$.
La réciproque est fausse (par exemple $A = [0, 1[$).

Démonstration. Soit $M = \max A$ le maximum de A. Alors M est un majorant de A donc

$$\forall x \in A \quad x \leq M$$

Prouvons maintenant que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \quad x > M - \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $x = M \in A$. Alors $M > M - \varepsilon$. Donc cette assertion est vraie. Ainsi, A admet une borne supérieure et $M = \sup A$. $\square$

2 Approximation décimale d'un réel

Rappel : l'ensemble des nombres décimaux est noté

$$\mathbb{D} := \left\{ \frac{a}{10^n} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N} \right\}$$

c'est l'ensemble des nombres qui s'écrivent avec un nombre fini de décimales. Si $x = \dfrac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, alors x possède au plus n décimales.

Exemple 2. $\dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{10^1} \in \mathbb{D}$ mais $\dfrac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.

Exemple 3. Plus généralement, étant donné $k \in \mathbb{N}$, on peut montrer que $\dfrac{1}{k} \in \mathbb{D}$ si et seulement si $k = 2^p 5^q$ avec $p, q \in \mathbb{N}$.

Proposition 7.7

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Le nombre décimal $r_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \in \mathbb{D}$ vérifie

$$r_n \leq x < r_n + \frac{1}{10^n}$$

r_n est appelé valeur approchée par défaut de x à 10^{-n} près.
$r_n + \dfrac{1}{10^n}$ est appelé valeur approchée par excès de x à 10^{-n} près.

	1	$\sqrt{2}$	e	π	-1
par défaut à 10^{-3} près	$1,000$	$1,414$	$2,718$	$3,141$	
par excès à 10^{-3} près	$1,001$	$1,415$	$2,719$	$3,142$	

Pour un réel , la valeur par défaut à 10^{-n} près s'obtient en tronquant son développement décimal à la n-ième décimale.

3 Parties denses dans $\mathbb{R}$

Proposition 7.8 (Partie dense)

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(*i*) Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, l'intervalle $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ contient au moins un élément de A.

(*ii*) Pour tous réels a, b avec $a < b$, l'intervalle $[a, b]$ contient au moins un élément de A.

On dit alors que A est dense dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. Montrons que ces deux assertions sont équivalentes. Supposons que (*ii*) est vraie. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. En posant $a = x - \varepsilon$ et $b = x + \varepsilon$, et en utilisant (*ii*), on obtient que $[a, b] = [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ contient un élément de A. D'où (*i*) est vraie.

Réciproquement, supposons (*i*) vraie. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. On pose

$$x = \frac{a+b}{2} \qquad \varepsilon = \frac{b-a}{2} > 0$$

En utilisant *(i)*, l'intervalle $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ contient un élément de A. Or,

$$x-\varepsilon = a \qquad x+\varepsilon = b$$

et donc $[x-\varepsilon, x+\varepsilon] = [a,b]$, ce qui montre *(ii)*. □

Théorème 7.9

Les ensembles $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Heuristique de la preuve. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Montrons que $[a,b]$ contient un élément de $\mathbb{D}$, puis de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

On pose $x = \dfrac{a+b}{2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $r_n \in \mathbb{D}$ la valeur approchée de x à 10^{-n} près. Pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand, on peut montrer que

$$a < r_n \leq x < b$$

et donc $[a,b]$ contient $r_n \in \mathbb{D}$. Ainsi, $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Comme $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$, on a également $r_n \in \mathbb{Q}$, donc $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Enfin, comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, l'intervalle $[a-\sqrt{2}, b-\sqrt{2}]$ contient un rationnel $q \in \mathbb{Q}$. Donc $[a,b]$ contient $q+\sqrt{2}$. Or, on peut montrer que $q+\sqrt{2} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, ce qui entraine que $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. □

Proposition 7.10

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. L'intervalle $[a,b]$ contient une infinité de décimaux, de rationnels et d'irrationnels.

4 Compléments

Les intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 7.11

On dit que $X \subset \mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ si

$$\forall a, b \in X \qquad (a \leq b \implies [a,b] \subset X)$$

Tous les intervalles de $\mathbb{R}$ sont de formes biens connues : $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$ ou $]a,b[$ avec $a, b \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, et avec l'interdiction de "fermer" en $\pm\infty$: $\cancel{[-\infty}, \ldots$ et $\cancel{+\infty]}$.

La droite numérique achevée

Définition 7.12 (Droite numérique achevée)

On note $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, où $-\infty$ et $+\infty$ sont deux éléments qui ne sont pas dans $\mathbb{R}$.

On prolonge à $\overline{\mathbb{R}}$ l'ordre $\leq$ défini sur $\mathbb{R}$, avec les relations

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad -\infty < x < +\infty$$

Avec cela, on montre que $(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$ est un ensemble ordonné, et que l'ordre est total.
En revanche, on ne peut pas définir les opérations $+$, $-$, $\times$, etc. sur $\overline{\mathbb{R}}$, à cause de certaines opérations interdites comme $+\infty-\infty$ ou $0\times\infty$.